Técnicas de Integração II

Algumas Integrais Trigonométricas

Prof. Dr. José Ricardo de Rezende Zeni

UNESP, FEG, Depto de Matemática

Guaratinguetá, agosto de 2017

Produto de Potências de Senos e Cossenos

$$\int sen^k(x)\cos^n(x)\ dx$$

É conveniente separar em dois casos (pois as técnicas utilizadas em cada caso são diferentes)

1º Caso: pelo menos um dos expoentes, k ou m, é ímpar.

2º Caso: ambos os expoentes, k e m, são pares.

1º Caso – Parte 1 – Fundamental

Um dos expoentes é igual a 1.

$$\int \cos^{n}(x)\,\mathrm{sen}(x)\;dx \qquad \text{ou} \qquad \int \mathrm{sen}^{k}(x)\cos(x)\;dx$$

Substitua u = cos x (quando o expoente do seno for igual a 1) para obter

$$\int \cos^{n}(x)\,\mathrm{sen}(x)\;dx = -\int u^{n}\,du$$

Quando o expoente do cosseno for igual a 1 substitua u = sen x.

1º Caso – Parte 1 – Exemplos

Um dos expoentes é igual a 1.

$$\int \cos^2(x)\,sen(x)\;dx \qquad \int sen(x)\cos(x)\;dx$$

$$\int \cos^7(x)\,sen(x)\;dx \qquad \int sen^4(x)\cos(x)\;dx$$

Neste caso, o outro expoente não precisa ser um inteiro.

$$\int \sqrt{\cos(x)}\,sen(x)\;dx \qquad \int \frac{\cos(x)}{sen(x)}\;dx$$

1^o Caso – Parte 2

Um dos expoentes é ímpar (maior que 1).

Será reduzido ao caso fundamental usando a identidade trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Exemplo

$$\int \cos^2(x)\,\text{sen}^3(x)\;dx$$

Escreva $\text{sen}^3 x = (1 - \cos^2 x).\text{sen } x$

Assim, a integral acima se reduz à

$$\int \cos^2(x)\,\text{sen}(x)\;dx \;-\; \int \cos^4(x)\,\text{sen}(x)\;dx$$

1º Caso – Parte 2 – Exemplos

Um dos expoentes é ímpar (maior que 1).

$$\int sen^3(x)\ dx \qquad \int sen^2(x)\cos^3(x)\ dx$$

$$\int \cos^3(x)\, sen^5(x)\ dx \qquad \int \cos^5(x)\ dx$$

Neste caso, o outro expoente não precisa ser um inteiro.

$$\int \sqrt{\cos(x)}\, sen^3(x)\ dx \qquad \int \frac{\cos^3(x)}{sen^2(x)}\ dx$$

2º Caso – Expoentes pares

Ambos os expoentes são pares.

Será reduzido à integral do cos(kx) usando as identidades trigonométrica para o arco metade

$\cos^2 x = ½ (1 + \cos(2x))$

$\text{sen}^2 x = ½ (1 - \cos(2x))$

Exemplo

$$\int \cos^2(x)\,dx = 1/2\int dx + 1/2\int \cos(2x)\,dx$$

2^o Caso – Exemplos

Ambos os expoentes são pares.

$$\int sen^4(x)\ dx \qquad \int sen^2(x)\cos^2(x)\ dx$$

$$\int \cos^2(x)\, sen^4(x)\ dx \qquad \int \cos^6(x)\ dx$$

Neste caso, os expoentes são inteiros positivos.

Produto de Tangentes e Secantes

$$\int \tan^k(x)\,sec^n(x)\;dx$$

Em algumas destas integrais, a técnica para resolução é similar a utilizada para resolver o produto de senos e cossenos.
Fórmulas básicas

$$\int sec^2(x)\;dx \;=\; \tan(x)+c$$

$$\int \tan(x).sec(x)\;dx \;=\; sec(x)+c$$

$$1 + \tan^2 x \;= sec^2 x$$

Um Caso Simples

Quando o expoente da secante é igual a 2,

a substituição u = tan x permite escrever

$$\int \tan^{k}(x)\, sec^{2}(x)\;dx \;=\; \int u^{k} du$$

Quando o expoente da secante é par,

o problema pode ser reduzido ao caso acima usando

$sec^{2n+2}(x) = sec^{2}(x).(1 + tan^{2}(x))^{n}$

Outro Caso Simples

Quando o expoente da tangente é igual a 1,

a substituição u = sec x permite escrever ($n \geq 1$)

$$\int \tan(x)\, sec^{n}(x)\ dx \ = \ \int u^{n-1} du$$

Quando o expoente da tangente é ímpar,

o problema pode ser reduzido ao caso acima usando

$\tan^{2n+1}(x) = \tan(x).(\tan^{2}(x))^{n} = \tan(x).(\sec^{2}(x) - 1)^{n}$

Um Caso Mais Díficil

Quando o expoente da tangente é par
e o expoente da secante é ímpar,
a integral pode ser resolvida utilizando
o método de integração por partes

Exemplo

$$\int \tan^2(x)\, sec(x)\;\; dx$$

Integral de uma Potência da Função Tangente

Fórmula de redução (k>1)

$$\int \tan^{k}(x)\ dx = \frac{1}{k-1}\tan^{k-1}(x) - \int \tan^{k-2}(x)\,dx$$

Isto reduz o problema para a integral da tan(x) (se k for ímpar) ou a integral de 1 (k par).

Demonstração: use a identidade

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$$

Potências da Tangente – Exemplos

Usando a fórmula de redução.

$$\int \tan^3(x)\ dx = 1/2 \tan^2(x) - \int \tan(x)\, dx$$

$$= 1/2 \tan^2(x) + \ln(\cos(x)) + c$$

$$\int \tan^4(x)\ dx = 1/3 \tan^3(x) - \int \tan^2(x)\, dx$$

$$= 1/3 \tan^3(x) - \tan(x) + x + c$$

Integral de uma Potência da Função Secante

$$\int \sec^k(x)\ dx$$

Expoente k = 2 é uma fórmula básica

$$\int \sec^2(x)\ dx = \tan(x) + c$$

Expoente par (k > 2): pode ser reduzido ao caso acima e a integral do produto de potências da tangente com a secante sendo o expoente da secante par (caso já visto). Exemplo

$$\int \sec^4(x)\ dx = \int \left(1+\tan^2(x)\right).\sec^2(x)\, dx$$

Potências da Secante – Expoente ímpar

Expoente k = 1 é uma fórmula básica

$$\int sec(x)\ dx = \ln(sec(x) + \tan(x)) + c$$

Expoente ímpar: é um caso mais difícil mas pode ser resolvido usando integração por partes (combinado com outras técnicas), reduzindo o expoente da secante.

Exemplo

$$\int sec^3(x)\ dx = 1/2\, sec(x).\tan(x) + 1/2 \int sec(x)\ dx$$

Potências da Secante – Fórmula de Redução

Expoente (n > 1) inteiro positivo

$$\int sec^{n}(x)\ dx = \frac{1}{n-1} sec^{n-2}(x).\tan(x) + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2}(x)\ dx$$

Demonstração usando integração por partes, similar a integração de sec^3 x.

Observação

O problema de resolver a integral do produto de uma potência par da tangente por uma potência ímpar da secante é equivalente ao problema de resolver a integral de uma potência ímpar da secante.

Use a identidade $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$

Exemplo

$$\int \tan^2(x)\,\sec(x)\;dx = \int \sec^3(x)\;dx - \int \sec(x)\;dx$$

Referências Bibliográficas

- Thomas, cap 8, seção 4.
- Simmons, cap 10, seção 3.